Άσκηση

Για $x_0 \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι η ακολουθία $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$x_{n+1} = \cos(x_n) \quad , n\in\mathbb{N}^*$$

συγκλίνει στο μοναδικό σταθερό σημείο x^* του συνηρτήσεως και

$$\lim \frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} = -\sqrt{1-x^{*2}}$$

Απόδειξη

Γνωρίζουμε ότι $\varphi(x) = \cos x \quad (\varphi(x_n) = x_{n+1} = \cos(x_n))$

$\varphi : \mathbb{R} \to [-1,1]$, ΔΔΔ η φ δεν είναι συστολή!

Παρατήρηση: $\max|\varphi'(x)| = \max|-\sin x| = 1 = L \nless 1$

Παρατηρώ ότι $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, $x_n \in [-1,1]$,
$x_{n+1} = \cos(x_n)$ αν $\varphi(x) : [-1,1] \to [-1,1]$

Τώρα $\max\limits_{-1\le x\le 1} |\varphi'(x)| = \max\limits_{-1\le x \le 1} |-\sin x| = \sin 1 < 1$

Η $\varphi : [-1,1] \to [-1,1]$ είναι συστολή στο $[-1,1]$
με $L = \sin 1$

Συνεπώς η ακολουθία συγκλίνει και έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο $x^* \in [-1,1]$.

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) = \varphi(x^*) + (x_n - x^*)\varphi'(x^*)$$
$$= x^* + (x_n - x^*)\varphi'(x^*)$$

Ζητάμε το όριο $n \to \infty$

$$\lim \frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} = \lim_{n \to \infty} (-\sin\xi) = -\sin x^* \quad (x^* > 0)$$

$$\sin x^* = \sqrt{1 - \cos^2(x^*)} = \sqrt{1 - (x^*)}$$

$$x^* = \cos x^*$$

Γραμμικά συστήματα

Ζητάμε το διάνυσμα $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ώστε $A\vec{x} = \vec{b}$

Δεδομένα A $n \times n$ πίνακας, $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$.

Θέματα που προκύπτουν

a) Κόστος μεθόδων (απαιτούμενες πράξεις)

b) Ευστάθεια μεθόδων

c) Κατάσταση γραμμικών συστημάτων.

a) Άμεσες (παραλλαγές της απαλοιφής Gauss)

b) Επαναληπτικές, δίνουν (όπως και π.χ. στη μέθοδο Νεύτωνα ακολουθία προσεγγίσεων της λύσης)

Γραμμικά συστήματα Δεδομένα: ο πίνακας συντελεστών A

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned} \quad \text{ή} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Ζητούμενο το $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Παρατήρηση: Θα εστιάσουμε σε συστήματα με μία λύση.

Ικανές και αναγκαίες συνθήκες

1. Ο A είναι αντιστρέψιμος, δηλαδή $\exists$ ο A^{-1}.
2. $|A| = \det(A) \neq 0$
3. $A\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$
4. Οι στήλες ή οι γραμμές του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα.

<u>Παρατήρηση</u> Οι συνθήκες είναι ισοδύναμες!

<u>Τρόποι επίλυσης</u>

α) <u>Κανόνας Cramer</u> συμβολικά $x_i = \dfrac{\det A_i}{\det A}$, $i = 1, \dots, n$

Για ένα nxn σύστημα απαιτούνται n+1 ορίζουσες και συνολικά $(n+1)[n!(n-1)]$ πολλαπλασιασμοί

β) Να υπολογίσουμε τον αντίστροφο A^{-1}, δηλαδή

$$A\vec{x} = \vec{b} \Rightarrow \vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

Οι δύο τρόποι έχουν μόνο θεωρητική αξία όχι πρακτική ή υπολογιστική.

<u>Κατηγοριοποιούμε τους πίνακες</u>

α) <u>Πυκνοί</u> ή αποθηκεύσιμοι πίνακες έχουν στοιχεία a_{ij} εν γένει διαφορετικά του μηδενός

b) <u>Αραιοί</u> ή σποραδικοί πίνακες έχουν πολλά μηδενικά στοιχεία που αν τα εκμεταλλευτούμε έχουμε σημαντικά υπολογιστικά οφέλη

Μέγεθος πινάκων (τετραγωνικών)
$n < 100$ μικροί
$100 \leq n < 1000$ μεσαίοι
$n \geq 100$ μεγάλοι

Κατηγορίες αριθμητικών μεθόδων
a) Άμεσες χρησιμοποιούνται κυρίως για πυκνούς πίνακες
b) Επαναληπτικές χρησιμοποιούνται κυρίως για αραιούς πίνακες

Άμεσες: παραλλαγή της μεθόδου Gauss.
Δίνουν ακριβές αποτέλεσμα με πεπερασμένο πλήθος πράξεων.

Επαναληπτικές: ακολουθία προσεγγίσεων της λύσης.